

2025 年 4 月高等教育自学考试

工程数学(线性代数、概率论与数理统计) 试题

课程代码:10993

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明:在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 2 分,共 16 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 设 2 阶矩阵 A 的行列式 $|A| = -3$, 则 $|-2A| =$

A. -12

B. -6

C. 6

D. 12

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $PA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, 则 $P =$ A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. 设 3 阶矩阵 A 的秩为 2, α_1, α_2 为方程组 $Ax = 0$ 的两个不同解, k 为任意常数, 则 $Ax = 0$ 的通解为A. $k\alpha_1$ B. $k\alpha_2$ C. $k(\alpha_1 + \alpha_2)$ D. $k(\alpha_1 - \alpha_2)$

4. 下列矩阵中能与对角矩阵相似的为

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

5. 设 A 与 B 为任意两个互不相容的随机事件, 则下列结论中正确的是

A. $P(AB)=0$

B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$

D. $P(A|B)=P(A)$

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{c}{n}k, (k=1,2,\cdots,n)$, 则常数 $c=$

A. $\frac{2}{n(n+1)}$

B. $\frac{1}{n+1}$

C. $\frac{2}{n+1}$

D. $\frac{n+1}{2}$

7. 设随机变量 $X \sim B(n, p) (0 < p < 1)$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 2\right\} =$

A. 0

B. $\Phi(2)$

C. $1-\Phi(2)$

D. 1

8. 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, θ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本, 则参数 θ 的极大似然估计为

A. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

B. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$

C. $\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

D. $\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

9. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 若向量组 $\alpha_1 = (-2, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, a)^T$ 线性无关, 则数 a 应满足的条件为 $\underline{\hspace{2cm}}.$



12. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 相似, 则数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 A 为 2 阶不可逆矩阵, E 为 2 阶单位矩阵, 且满足 $|2A + E| = 0$, 则矩阵 A 的全部特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 袋中有 3 个新球, 2 个旧球, 现每次取一个, 不放回地抽取两次, 则第二次才取到新球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设随机变量 X 的分布律为 $\frac{X}{P} \begin{array}{c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2a & 0.1 & a \end{array}$, 则 $P\{X=1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$, 则 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 设总体 $X \sim N(1, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3, X_4 为来自 X 的样本, 设 $Y = a(X_1 - X_4)^2$, 若 $Y \sim \chi^2(1)$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 设某产品的重量 $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, σ^2 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本标准差为 S , 欲对产品重量进行假设检验, $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$, 当 H_0 成立时, 选用的统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(k)$, 则自由度 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 8 分, 共 56 分。

19. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解.

21. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 求正交变换 $x = Py$ 化二次型为标准形.



22. 设随机变量 X 的分布律为 $\frac{X}{P} \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}$.

求: (1) X 的分布函数 $F(x)$; (2) $P\{-2 < X < 0\}$; (3) $Y = X^2$ 的分布律.

23. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} cx(3x+2y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

求: (1) 常数 c 及概率 $P\left\{0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}\right\}$;

(2) (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(3) X 与 Y 是否相互独立? 为什么?

24. 设随机变量 X 服从区间 $[-2, 4]$ 上的均匀分布, 随机变量 $Y = \begin{cases} -1, & X < 1, \\ 0, & X = 1, \\ 2, & X > 1. \end{cases}$

求: (1) $E(X), D(X)$; (2) $E(Y), D(Y)$.

25. 设某厂家生产一种材料, 其抗压强度 $X \sim N(12, 9)$, 现厂家换一种新工艺生产该材料, 随机抽取 36 个样品, 测得样本均值 $\bar{x} = 12.3$. 试判断用新工艺后, 该材料平均抗压强度较以往有无显著性变化? ($\alpha = 0.05$). (附: $u_{0.025} = 1.96$)

四、证明题: 本题 8 分。

26. 设 $A = E - \alpha\alpha^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, α 是 n 维非零列向量. 证明 $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$.

